**МИНОБРНАУКИ РОССИИ**

**Санкт-Петербургский государственный**

**электротехнический университет**

**«ЛЭТИ» им. В.И. Ульянова (Ленина)**

**Кафедра математического обеспечения и применения ЭВМ**

отчет

**по практической работе №5**

**по дисциплине «Теория принятия решений»**

**Тема: Вычисление расстояния между кривыми на плоскости**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Студентка гр. 7381 |  | Алясова А.Н. |
| Преподаватель |  | Попова Е.В. |

Санкт-Петербург

2021

**Цель работы.**

Использование инструментальных средств для решения задач поддержки принятия решения, а также овладение навыками принятия решения на основе нахождения минимального расстояния между кривыми.

**Основные теоретические положения.**

**Метод множителей Лагранжа**

Стандартная условно-экстремальная задача формулируется следующим образом: найти минимум функции (критерия) при наличия ограничений:

или коротко:

Основной аналитический метод решения связан с введением вектора множителей Лагранжа и построением составного критерия (функции Лагранжа):

или в более подробной записи:

Экстремум этой функции ищется обычным образом путем взятия производных и приравнивания их нулю. Тем самым исходная условно-экстремальная задача сводится к задаче отыскания безусловного экстремума.

**Применение вариационного исчисления**

Методы Ферма и Лагранжа позволяют аналитически решать конечномерные экстремальные задачи, когда критерий зависит от конечного числа неизвестных. Более трудны для решения бесконечномерные экстремальные задачи, когда критерий зависит от неизвестной функции . Такие задачи решают методами вариационного исчисления.

Простейшая задача вариационного исчисления формулируется следующим образом. Требуется найти кривую , проходящую через две заданные точки , и доставляющую экстремум функционалу:

Эйлер доказал, что искомая кривая удовлетворяет уравнению (уравнение Эйлера):

где через и обозначены частные производные от подынтегральной функции:

Уравнение Эйлера представляет собой нелинейное дифференциальное уравнение второго порядка, семейство решений которого содержит экстремальную кривую .

Следует заметить, что уравнение Эйлера не дает окончательного решения поставленной задачи, а лишь выделяет класс кривых, подозрительных на экстремум. Ситуация здесь вполне аналогична поиску экстремума функции путем ее дифференцирования, когда экстремум может оказаться либо в одной из точек, где производная равна нулю, либо на краях интервала.

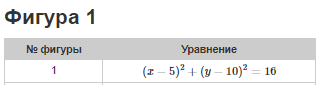
**Постановка задачи.**

Найти двумя способами расстояние между двумя фигурами на плоскости (методом множителей Лагранжа и при помощи вариационного исчисления).

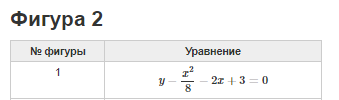
**Индивидуализация.**

Вариант 1.

Фигура 1 = 1.



Фигура 2 = 1.



**Выполнение работы.**

С помощью инструментального средства согласно варианту были построены фигуры в одной плоскости (см. рис. 1).

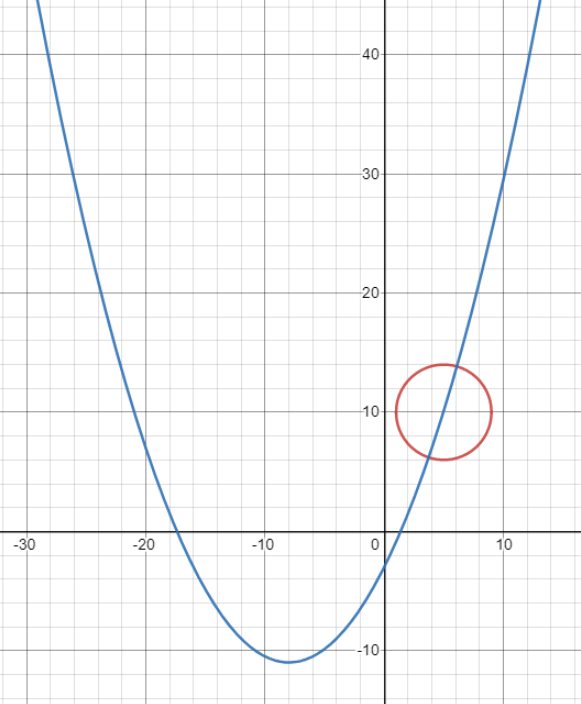


Рисунок 1 – Построение фигур

Так как фигуры пересекаются, путем переноса центра окружности в точку получено расстояние между фигурами (рис. 2). Измененные уравнения:

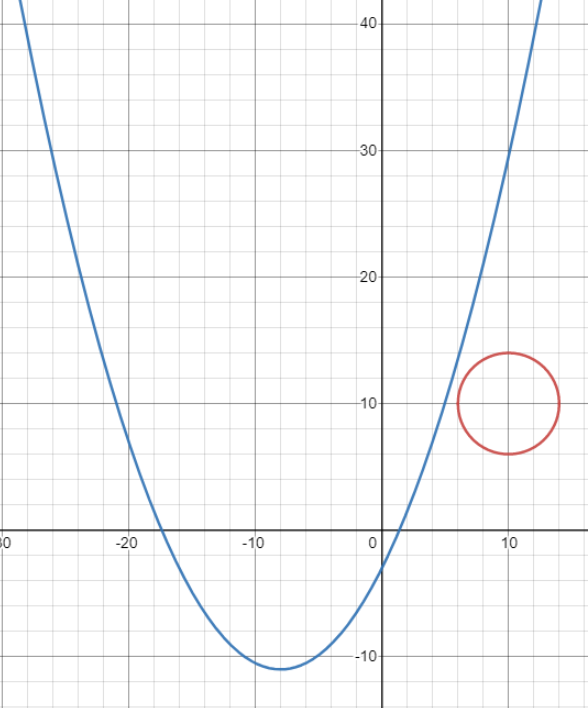


Рисунок 2 – Построение измененных фигур

1) Решим задачу с помощью вариационного исчисления.

Для того, чтобы найти минимальное расстояние методом вариационного исчисления требуется минимизировать функционал:

где начало кратчайшего отрезка (на фигуре 1), соединяющего фигуры находится в точке , конец кратчайшего отрезка (на фигуре 2) - .

Условие трансверсальности:

Начальная система:

Упростим уравнения и найдем производные по :

Прямая, на которой находится минимальный отрезок, соединяющий кривые, имеет вид:

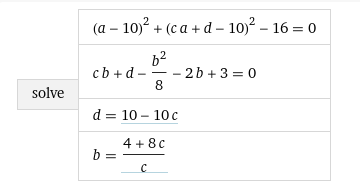
Её производная:

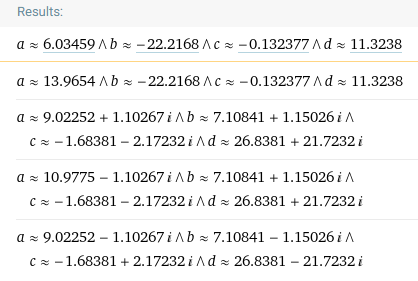
Будем решать следующую систему уравнений:

Упростим 4е уравнение:

Упростим 5е уравнение:

Решим систему уравнений с помощью Wolfram Alpha:





Итоговые решения системы:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

Получаем прямую:

Точка на первой кривой имеет координаты:

Точка на второй кривой имеет координаты

Полученная прямая представлена на рис. 3.

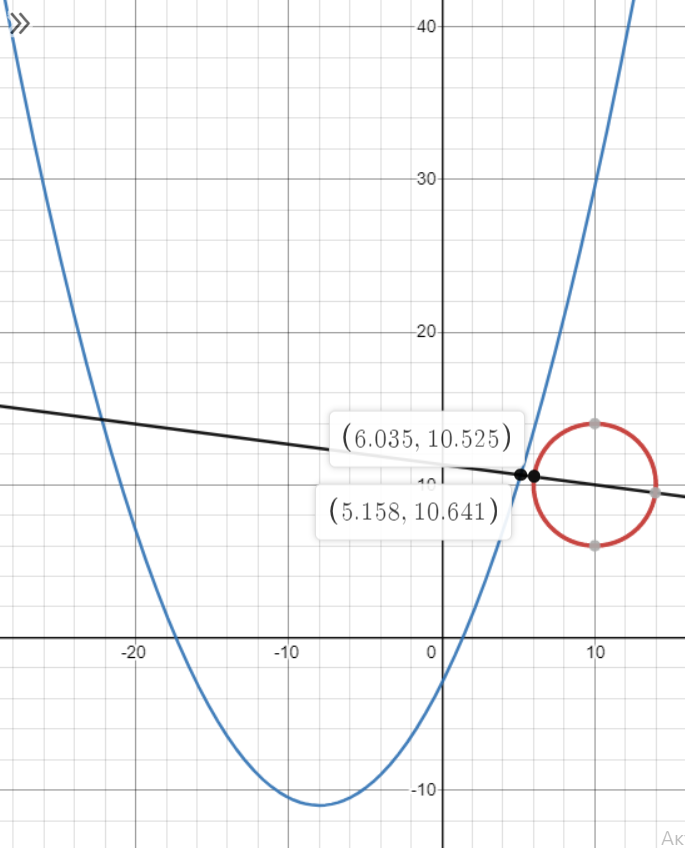


Рисунок 3

2) Решим задачу с помощью метода множителей Лагранжа.

Для нахождения минимального расстояния между прямыми было использовано евклидово расстояние:

Составим целевую функцию для перехода к задаче безусловной минимизации и использованием метода множителей Лагранжа:

где

Построим функцию Лагранжа:

Найдем решения системы уравнений из частных производных целевой функции:

Для решения данной системы была составлена программа, код приложения представлен в приложении А. Результат нахождения программой расстояния с использованием метода множителей Лагранжа представлен на рис. 4.

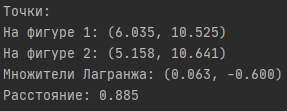


Рисунок 4

Решением системы является:

Изображение представлено на рис. 5.

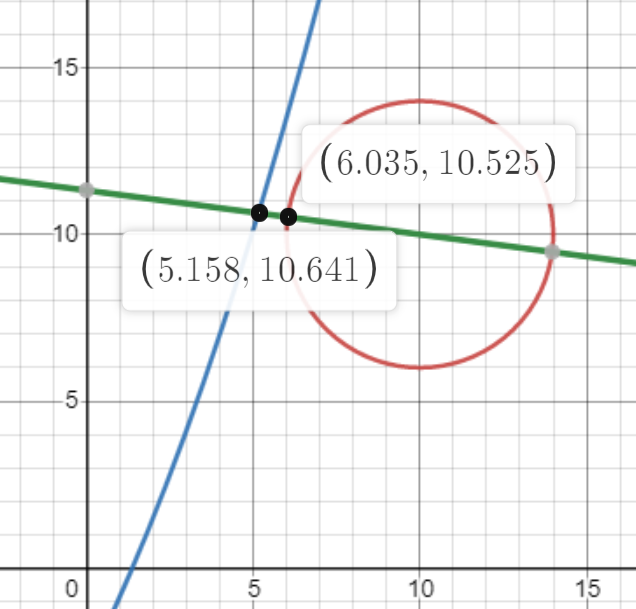


Рисунок 5

Получили результаты, аналогичные предыдущему пункту, что говорит о точности и рациональности использования обоих методов.

**Выводы.**

В ходе данной лабораторной работы были использованы инструментальные средства для решения задач поддержки принятия решения, а также получены навыки принятия решения на основе нахождения минимального расстояния между кривыми.

**ПРИЛОЖЕНИЕ А**

**Код для метода множителей Лагранжа**

import numpy as np

from scipy.optimize import fsolve

def fig\_1(x, y):

return (x - 10) \*\* 2 + (y - 10) \*\* 2 - 16

def fig\_2(x, y):

return (y-(x\*\*2)/8 - 2\*x + 3)

def point\_dist(x1, x2, y1, y2):

return np.sqrt((x1 - x2) \*\* 2 + (y1 - y2) \*\* 2)

def system\_lagrange(x):

x1, x2, y1, y2, λ1, λ2 = x

dx1 = 2\*x1 - 2\*x2 - 2\*x1\*λ1 - 20\*λ1

dx2 = 2\*x2 - 2\*x1 - (1/4)\*x2\*λ2 - 2\*λ2

dy1 = 2\*y1 - 2\*y2 + 2\*λ1\*y1 - 20\*λ1

dy2 = 2\*y2 - 2\*y1 + λ2

dλ1 = fig\_1(x1, y1)

dλ2 = fig\_2(x2, y2)

return np.array([dx1, dx2, dy1, dy2, dλ1, dλ2])

if \_\_name\_\_ == "\_\_main\_\_":

x0 = np.array([5, 2, 0, -2.5, 1, 1])

result = fsolve(system\_lagrange, x0)

x1, x2, y1, y2, λ1, λ2 = result

print("Точки:\nНа фигуре 1: ({0:.3f}, {1:.3f})".format(x1, y1))

print("На фигуре 2: ({0:.3f}, {1:.3f})".format(x2, y2))

print('Множители Лагранжа: ({0:.3f}, {1:.3f})'.format(λ1, λ2))

print('Расстояние: {:.3f} '.format(point\_dist(x1, x2, y1, y2)))